Korrektureffekte in der Theorie der Inneren Bremsstrahlung

---

von

Dieter Gebhardt

aus Nürnberg

1967

1967 № 147

Korrektureffekte
in der Theorie der Inneren Bremsstrahlung

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Dieter Gebhardt

aus Nürnberg

Erlangen, 1967

als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Erlangen - Nürnberg

UNIV. LEIDEN BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung:	22. Februar 1967
Dekan:	Universitätsprofessor Dr. K. Brodersen
Berichterstatter:	Universitätsprofessor Dr. H. Volz
Berichterstatter:	Univeristätsprofessor Dr. L. Waldmann

Inhaltsverzeichnis

		Seite
Einführung		1
Kap. I	Kritische Diskussion der Arbeiten über Coulombkorrekturen zur IB	3
1)	Die Coulombkorrekturen in Bornscher Näherung von Lewis und Ford	3
2)	Die Arbeiten zur Verbesserung der Coulombkorrekturen	5
	a) Die Näherung für nichtrelativistisches Endelektron und kleine Ordnungszahl von Spruch und Gold	6
	b) Die Drehimpulsentwicklung von Vinh Mau	7
	c) Die Methode von Felsner	10
3)	Gültigkeitsbereich der Bornschen Näherung für Coulombkorrekturen bei der IB	12
4)	Vergleich numerischer Ergebnisse und Zusammenfassung	15
Kap. II	Weitere Korrektureffekte	18
1)	Angeregter Kernzwischenzustand, Doppel-IB und Einfluß von Neutrinogrößen	18
2)	Der Einfluß eines eventuell auftretenden intermediären Bosons	19
3)	Die Berücksichtigung der endlichen Kerngröße	20
4)	Durch die Elektronenhülle verursachte Effekte	22
	a) Greensche Funktion und besetzte Schalen	22
	b) Der Zweielektronen-Endzustand	23
	c) Das gebundene Endelektron	24
	d) Abschirmkorrekturen	25
Schlußbetrachtungen und Zusammenfassung		31
Textfiguren 1 bis 4		34
Literaturverzeichnis		38

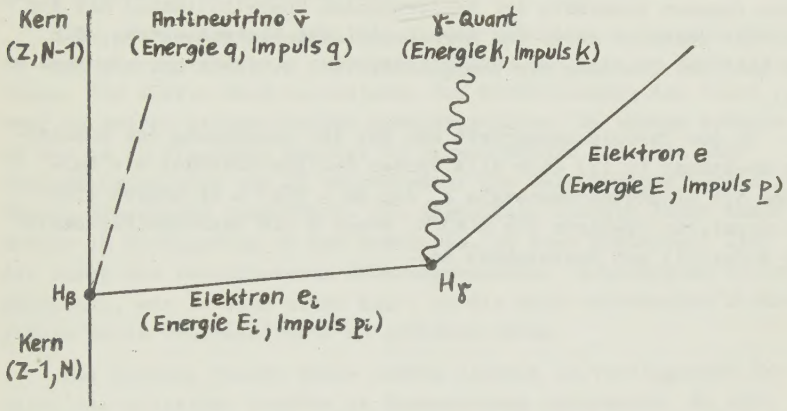
Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535718_0067

Einführung

Der ß-Zerfall eines Kerns wird begleitet von einer kontinuierlichen und intensitätsschwachen γ-Strahlung, der Inneren Bremsstrahlung (IB), die 1927 von Aston [1] bei Messungen an RaE gefunden wurde.

Die theoretische Darstellung dieses Vorganges gibt in der Sprache der Feynman-Graphen *) folgendes Bild:



Das diesem Graphen entsprechende Matrixelement lautet:

$$(1) \qquad \mathcal{M} = \sum_i \frac{\langle e, \gamma | H_\gamma | e_i \rangle \langle e_i, \bar{\nu}, \text{Kern}(Z) | H_\beta | \text{Kern}(Z-1) \rangle}{(E+k) - E_i}$$

Über die auftretenden Zwischenzustände (Index i) wird dabei summiert. H_β und H_γ beschreiben die schwache bzw. die elektromagnetische Wechselwirkung.

Die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit ist dann gegeben durch

$$(2) \qquad w = 2\pi \sum_{\text{unbeob. Größen}} |\mathcal{M}|^2 \, \delta(E_0 - E - k - q)$$

mit dem Matrixelement $\mathcal{M}$ aus (1). E_0 ist die Grenzenergie des ß-Zerfalls. Der Endzustand ist charakterisiert durch die Orientierung des Kernspins sowie Polarisation und Impuls der bei der IB

---

*) Bei dessen Beschriftung und im folgenden wird, wie üblich, $\hbar$ = Elektronenmasse m = c = 1 gesetzt.

entstehenden Teilchen (Elektron, Antineutrino und γ-Quant).

Die hier skizzierte Theorie wurde erstmals 1936 von Knipp und Uhlenbeck [2] und unabhängig davon von Bloch [3] durchgeführt (KUB-Theorie). Für die Elektronenwellenfunktionen im Matrixelement $\mathfrak{M}$ der IB in (1) wurden dabei in Bornscher Näherung ebene Wellen verwendet; die Coulombwechselwirkung zwischen dem entstehenden Elektron und dem Endkern wurde somit vernachlässigt.

Die ersten zur Prüfung der KUB-Theorie angestellten Experimente ergaben innerhalb der Fehlergrenzen Übereinstimmung mit der Theorie. Gemessen wurde das normierte Lichtquantenspektrum, d.h. die Zahl der Photonen pro Energieintervall k...k+dk und pro Zerfall.

In der Theorie integriert man bei der Berechnung des normierten Spektrums in (2) über alle Größen des Endzustandes mit Ausnahme der Lichtquantenenergie k. Aus $dw = S(k) \cdot dk$ ergibt sich das normierte Spektrum als $S(k)/N$, wobei N die Wahrscheinlichkeit für ß-Zerfall pro Zeiteinheit ist.

Kap. I Kritische Diskussion der Arbeiten über Coulombkorrekturen zur IB

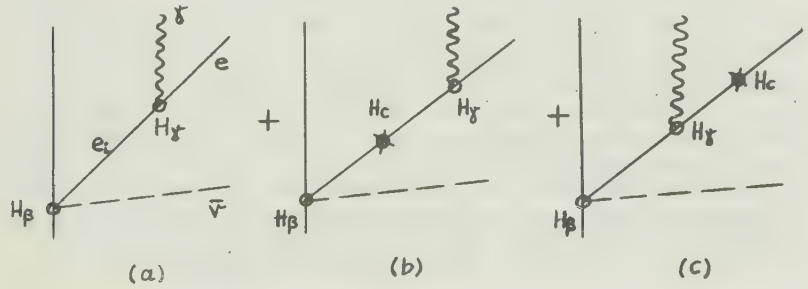
Eine Verbesserung der KUB-Theorie erwies sich als notwendig, nachdem mit verbesserten Meßmethoden experimentelle Ergebnisse erhalten worden waren, die nicht mehr mit dieser Theorie übereinstimmten. Um 1955 wurden in mehreren Arbeiten [4,5,6] Meßwerte veröffentlicht, die teilweise um über 50 % höher lagen, als es nach der KUB-Theorie zu erwarten war.

Das nächstliegende war, die in der KUB-Theorie vernachlässigte Coulombwechselwirkung zwischen Elektron und Kern zu berücksichtigen. Die exakte Berücksichtigung des Kerncoulombfeldes führt aber zu großen mathematischen Schwierigkeiten. Es wurden deshalb in den im vorliegenden Kapitel zu besprechenden Arbeiten über Coulombkorrekturen zur IB verschiedene die Berechnungen vereinfachende Näherungen eingeführt. Die Ergebnisse standen dabei immer wieder im Widerspruch zu den Meßwerten. Da aber Unklarheit über die durch die verschiedenen Näherungsmethoden erursachten Fehler herrschte, war es auch nicht klar, ob die noch bestehenden Diskrepanzen durch Coulombeffekte zu erklären waren.

Zur Klärung dieser Frage werden deshalb im vorliegenden Kapitel die einzelnen Ansätze im Zusammenhang untersucht. Es soll dabei versucht werden, zu einer Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches der verwendeten Näherungen und zu einer Fehlerabschätzung zu gelangen.

1) Die Coulombkorrekturen in Bornscher Näherung von Lewis und Ford

In einer 1956 erschienenen Arbeit [7] berücksichtigten Lewis und Ford das Coulombfeld in Bornscher Näherung. Dabei werden folgende Feynman-Graphen betrachtet:



(a) ist der Graph der KUB-Theorie.

(b) liefert die Coulombkorrekturen am Zwischenzustand in der durch die Bornsche Näherung erfaßten 1. Ordnung von (αZ).
[$\alpha = e^2 = \frac{1}{137}$ ist die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante]. Lewis und Ford fanden, daß dieser Beitrag verschwindet.

(c) ergibt die Coulombkorrekturen am Endzustand des Elektrons.

Das Ergebnis ist, daß für erlaubte und eindeutig einfach verbotene ß-Zerfälle in 1.Ordnung von (αZ)

$$(3) \quad S(K) = \int_1^{E_0-k} S_{KUB}(k,E)\left(1+\pi\alpha Z\frac{E}{p}\right) dE \qquad *)$$

Dabei ist die Integration über die Energie des Elektrons noch nicht explizit ausgeführt. Wenn die Kernladung Z Null gesetzt wird, ergibt sich die KUB-Theorie; die Coulombkorrekturen äußern sich in dem zusätzlichen Faktor.

Jetzt sind aber auch an dem Normierungsfaktor N Coulombkorrekturen anzubringen. Es ist in 1.Ordnung von (αZ)

$$(4) \quad N = \int_1^{E_0} P(E)\left(1+\pi\alpha Z\frac{E}{p}\right) dE ,$$

wobei die Integration über P(E) allein wie in (3) das Z=0-Ergebnis liefert. Bei der Bildung des normierten Spektrums S(k)/N heben sich nun die Coulombkorrekturen in Zähler und Nenner weitgehend auf; deshalb liefert die Rechnung von Lewis und Ford nur eine kleine Änderung der Werte der KUB-Theorie. Eine Übereinstimmung mit den Meßwerten konnte damit nicht erreicht werden.

In der Arbeit von Lewis und Ford wird allerdings das Coulombfeld nur in erster Näherung berücksichtigt. Die im folgenden Abschnitt B diskutierten Arbeiten wurden zum Zweck einer weiteren Verbesserung der Theorie verfaßt. Es werden sich aber in Abschnitt 2 Gründe dafür ergeben, die Verwendbarkeit der von Lewis und Ford gebrauchten Bornschen Näherung bei der Berechnung der Coulombkorrekturen eingehender zu untersuchen. Dies wird in Abschnitt 3 geschehen.

---

*) Dieses Ergebnis erhält auch Nilsson (Arkiv f.Fysik 10, S. 467 (1956)). Da aber seine Betrachtungen phänomenologischer Art sind, soll darauf nicht näher eingegangen werden.

2) Die Arbeiten zur Verbesserung der Coulombkorrekturen

Zur exakten Einbeziehung der Coulombkorrekturen in den in der Einführung dargestellten Formalismus braucht man nur für die Elektronenwellenfunktionen in (1) die Lösungen im Coulombfeld zu verwenden.

Dabei tritt jedoch eine große Schwierigkeit auf. In der KUB-Theorie, wo die Elektronen durch ebene Wellen beschrieben werden, lautet die Ortsabhängigkeit im Matrixelement der elektromagnetischen Wechselwirkung wegen $H_{\gamma} \sim e^{i\underline{k}\underline{r}}$ gerade $\int e^{i(\underline{p}_i - \underline{p} - \underline{k})\underline{r}} d\tau$. Die Integration *) liefert somit die Deltafunktion $\delta(\underline{p}_i - \underline{p} - \underline{k})$; letztere macht die nachfolgende Integration $\int d\underline{p}_i$, die in $\sum_i$ steckt, trivial.

Da die Coulombfeld-Wellenfunktionen aber den Ortsanteil in Form von konfluenten hypergeometrischen Funktionen enthalten, sind die Ergebnisse der im Matrixelement der IB auftretenden Integrationen nicht mehr in geschlossener Form anzugeben, wobei als weitere Komplikation hinzu kommt, daß die Wellenfunktion des Elektrons im Endzustand exakt nur als unendliche Summe über Kugelwellen geschrieben werden kann. Diese Kugelwellen sind Eigenlösungen der Diracgleichung mit Coulombfeld; ihre Eigenwerte sind der Gesamtdrehimpuls j sowie dessen z-Komponente j_z [8]. In sehr großem Abstand vom Kern wird das davonfliegende Elektron aber durch eine ebene Welle beschrieben. Eine solche enthält alle Drehimpulse j, d.h. der Endzustand ist eine Linearkombination aller Coulombfeld-Eigenfunktionen.

Es ist in diesem Fall zweckmäßig, zuerst die Summation über die Zwischenzustände des Elektrons durchzuführen. Diese bezieht sich auf die Anteile

$$(5) \quad \sum_i \frac{e_i(\underline{r}_2)\, e_i^{+}(\underline{r}_1)}{(E+k)-E_i}$$

aus $\mathcal{M}$. In (5) steht aber gerade die Greensche Funktion eines Elektrons im Coulombfeld. Diese ist in passender Form von Glauber und Martin [9] aus der entsprechenden Differentialgleichung bereits ermittelt worden bei der theoretischen Behandlung des "Radiative Orbital Electron Capture" (für die IB sind nur geringfügige Änderungen anzubringen).

---

*) Die Integration des Matrixelementes der schwachen Wechselwirkung macht keine Schwierigkeiten, da der ß-Zerfall auf das Kernvolumen beschränkt ist.

Zwar ist das Ergebnis eine unendliche Summe über Whittaker-Funktionen, jedoch kommen bei Beschränkung auf eine bestimmte Art des ß-Zerfalls auf Grund von Auswahlregeln jeweils nur wenige Terme ins Spiel.

Diese Methode findet Verwendung in Arbeiten zur Verbesserung der Coulombkorrekturen bei der IB; die noch verbleibende Schwierigkeit, daß nämlich die Wellenfunktion des Elektrons im Endzustand exakt nur durch eine unendliche Summe dargestellt werden kann, wird dabei verschieden behandelt.

a) Die Näherung für nichtrelativistisches Endelektron und kleine Ordnungszahl von Spruch und Gold

In der Arbeit von Spruch und Gold [10] wird die soeben beschriebene Methode für erlaubten ß-Zerfall verwendet. Um den Rechenaufwand einigermaßen im Rahmen zu halten, werden zwei wesentliche Näherungen gemacht:

i) Sommerfeld und Maue [11] haben gezeigt, daß man die Wellenfunktion des Elektrons im Endzustand in geschlossener Form darstellen kann, wenn man die Terme, die echt von der Größenordnung $(\alpha Z)^2$ sind, gegen die Anteile der Größenordnung 1 vernachlässigt. Spruch und Gold verwenden die Sommerfeld-Maue-Wellenfunktion, vernachlässigen aber dabei zusätzlich schon die Anteile, die echt von der Größenordnung (αZ) sind. In der Rechnung mitgenommen werden jedoch die Anteile einer allgemeinen Potenz von $(\alpha Z)\cdot\frac{1}{\varrho}$, wo ϱ ein charakteristischer Elektronen- bzw. γ-Quantenimpuls ist. Die Idee dabei ist, daß bei Beschränkung auf leichte Elemente etwa für $Z < 20$ stets $(\alpha Z) < 0.15 \ll 1$ ist, jedoch für entsprechend kleine ϱ nicht mehr $\frac{\alpha Z}{\varrho} \ll 1$ zu sein braucht.

Dieses Vorgehen begrenzt die Anwendbarkeit der Ergebnisse auf ß-Zerfälle von Kernen kleiner Ordnungszahl Z.

ii) Unter der Beschränkung auf solche Fälle, wo das Elektron im Endzustand nichtrelativistische Geschwindigkeit besitzt, werden die Ausdrücke weiter vereinfacht. Da die Bewegungsrichtungen eines Lichtquants und eines nichtrelativistischen Endelektrons näherungsweise aufeinander senkrecht stehen [3], wird außerdem noch $\underline{p}\cdot\underline{k} = 0$ gesetzt, womit eine recht mühsame Raumwinkelintegration bei der Berechnung des Spektrums umgangen wird.

Dadurch wird die Anwendbarkeit der Ergebnisse auf ß-Zerfälle mit niedriger Grenzenergie beschränkt.

Trotz der Vernachlässigung der Glieder der Größenordnung (αZ) stimmt das Ergebnis von Spruch und Gold in 1. Ordnung von (αZ) mit dem Ergebnis von Lewis und Ford überein, wenn man in letzterem äquivalente nichtrelativistische Näherungen macht. Das rührt daher, daß die von Spruch und Gold vernachlässigten Anteile $\sim (\alpha Z)$ in $\mathfrak{M}$ gegenüber den in der Rechnung mitgenommenen Anteilen $\sim (\alpha Z)$ und gegenüber den Anteilen für $Z = 0$ gerade um $\pi/2$ phasenverschoben sind. In $|\mathfrak{M}|^2$ ergeben sie daher Korrekturen $\sim (\alpha Z)^2$. Im Gültigkeitsbereich der erwähnten Näherungen sind die Ergebnisse von Spruch und Gold somit eine Verbesserung der Werte von Lewis und Ford.

Praktisch anwendbar ist die Theorie nur für S^{35} mit $Z = 17$ und $E_o - 1 = 0.327$ *). Numerische Ergebnisse werden in Abschnitt 4 zusammenfassend betrachtet.

Eine Fehlerabschätzung für die Arbeit von Spruch und Gold dürfte wegen der Verschiedenheit der einzelnen Näherungen schwierig sein. Sie erübrigt sich indes, da die nun zu besprechende Arbeit von Vinh Mau [12], die zur exakteren Einbeziehung der Coulombkorrekturen bestimmt war, ohne diese Näherungen auskommt und ebenfalls für S^{35} anwendbar ist.

b) Die Drehimpulsentwicklung von Vinh Mau

Hierbei wird für das Elektron im Zwischenzustand ebenfalls die Methode der Greenschen Funktionen für erlaubten ß-Zerfall verwendet. Im Gegensatz zur Arbeit von Spruch und Gold werden dabei keine Näherungen gebraucht und es findet auch für die Wellenfunktion des Elektrons im Endzustand eine exakte Entwicklung von Deloff [13] Verwendung. Diese besteht, wie oben erwähnt, aus einer unendlichen Summe über sphärische Wellenfunktionen mit scharfem j und j_z. Vinh Mau entwickelt nun auch den Ortsanteil der elektromagnetischen Wechselwirkung $e^{\underline{ikr}}$ nach Drehimpulsen L des Lichtquants. Zwar kann dann im Matrixelement der elektromagnetischen Wechselwirkung die Raumwinkel- und Radialintegration ausgeführt werden, das Endresultat besteht aber in einer doppelten unendlichen Summe ($L = 0,1, ..; j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, ..$) über die Ergebnisse jeweils einer Integration, nämlich hypergeometrische Funktionen mit mehreren Veränderlichen. Für die

---

*) 1 ist in den verwendeten Einheiten die Ruhemasse des Elektrons.

numerische Auswertung müssen diese Entwicklungen natürlich abgeschnitten werden. Vinh Mau nimmt für sein einziges Anwendungsbeispiel S^{35} die Anteile L = 0 und 1, sowie $j = \frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$. Der dabei auftretende Fehler wird von Vinh Mau auf 0,5 % geschätzt. Schon für diese wenigen Glieder werden die Rechnungen sehr aufwendig und unübersichtlich. Ebenso wie bei Spruch und Gold müssen sie zuletzt numerisch durchgeführt werden *).

Da in der Arbeit von Vinh Mau erst bei der numerischen Auswertung Näherungen gemacht werden, erscheint es hier wesentlich, einen Begriff von dem dadurch verursachten Fehler zu bekommen.

Man kann zu diesem Zweck die Frage stellen, wie die mit den angegebenen Näherungen berechneten Ergebnisse im Grenzfall Z = 0 aussehen. Diese Ergebnisse kann man dann zur Abschätzung des auftretenden Fehlers mit der für Z = 0 exakten Theorie, d.h. der KUB-Theorie, vergleichen. Der Grenzfall Z ≠ 0 ist wegen des Auftretens unbestimmter Ausdrücke aus den Rechnungen von Vinh Mau nicht mehr direkt abzulesen.

Die Berechnung verläuft ohne Schwierigkeiten. Es zeigt sich durch Vergleich der Ergebnisse mit der KUB-Theorie, daß mit der von Vinh Mau verwendeten Näherung das Spektrum für S^{35} ($E_o - 1 = 0{,}327$) für Z = 0 um 5 bis 8 % zu hoch liegt.

---

*) In einer kürzlich erschienenen Arbeit (R.E. Struzynski and F. Pollock, Nucl.Phys. 79 (1966), S. 113) wird das Spektrum der IB noch einmal mit den Methoden und den numerischen Näherungen der Arbeit von Vinh Mau berechnet. Numerische Ergebnisse werden wie bei Vinh Mau nur für S^{35} angegeben. Von Struzynski und Pollock wird zusätzlich in der Greenschen Funktion, die das Elektron im Zwischenzustand beschreibt, die endliche Kerngröße berücksichtigt; für die Wellenfunktion des Elektrons im Endzustand geschieht dies allerdings nicht.

In Kap. II 3 der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß der Einfluß der endlichen Kerngröße auf das Spektrum der IB für S^{35} von der relativen Größenordnung 10^{-4} und somit vernachlässigbar ist. Die in der Arbeit von Struzynski und Pollock erhaltenen Ergebnisse sind somit als Kontrolle der Vinh Mau-Ergebnisse wertvoll. Letztere werden bestätigt; die noch auftretenden Diskrepanzen von weniger als 2 % liegen wohl im Rahmen der durch die numerische Auswertung entstehenden Fehler.

Schwerwiegend ist jedoch, daß diese Diskrepanzen für P^{32} (E_o -1 = 3.34) *) bis zu 50 % betragen (in derselben Richtung wie bei S^{35}). Hier würde die numerische Auswertung der Theorie von Vinh Mau für Z = 0 durch notwendige Hinzunahme weiterer Summenglieder gegenüber S^{35} noch wesentlich komplizierter.

Die Ergebnisse dieser Kontrollrechnung sind durchaus vernünftig, da für kleine Grenzenergien keine großen Drehimpulse ins Spiel kommen werden, die Näherung also brauchbar sein wird. Für große Grenzenergien kann man das nicht mehr sagen, so daß also die Anwendbarkeit der Ergebnisse in der von Vinh Mau verwendeten Näherung wie bei Spruch und Gold auf Zerfälle mit kleiner Grenzenergie beschränkt ist.

Bei S^{35}, dem einzigen von Vinh Mau betrachteten Fall, liegen die Werte von Starfeld und Svantesson [5] fast über den ganzen Meßbereich um etwa 20 % höher als die theoretischen Ergebnisse. Der Z=0-Test der Vinh Mau-Theorie zeigte aber, daß die theoretischen Werte sowieso schon um etwa 5 % zu hoch liegen. Diese Diskrepanzen würden also bei einer Verbesserung der Theorie durch Einbeziehung weiterer Terme der Drehimpulsentwicklung sicher noch vergrößert.

Unglücklicherweise bestehen aber für S^{35} auch zwischen den experimentellen Ergebnissen große Diskrepanzen. Die Meßwerte von Langevin-Joliot [6] liegen im ganzen Meßbereich 60 - 70 % über den Werten von Starfeld und Svantesson [5]. Wenn man darin auch die Tendenz sehen kann, daß die experimentellen Ergebnisse höher liegen als die theoretischen, so sind doch andererseits die Meßwerte offensichtlich mit großen Unsicherheiten versehen. Es bleibt also die Aufgabe, den Vergleich der Theorie mit dem Experiment noch einmal an anderen eventuell experimentell besser gesicherten Fällen nachzuprüfen. Hier wird Abschnitt 4 dieses Kapitels anknüpfen.

---

*) Die Kerne S^{35} und P^{32} erweisen sich als gut geeignet für Vergleiche theoretischer Ergebnisse, da die Ordnungszahl Z des Endkerns etwa gleich ist, E_o-1 jedoch um einen Faktor 10 differiert. Experimentelle Ergebnisse liegen in beiden Fällen vor.

c) Die Methode von Felsner

Die beträchtlichen mathematischen Schwierigkeiten, die in den diskutierten Arbeiten auftreten, versuchte Felsner [14] zu umgehen. Er verwendet für die Wellenfunktion des Elektrons im Zwischen- und Endzustand den spinoriellen Faktor, den man im Coulombfeld in der Grenze $r \to 0$ erhält. Für den Ortsanteil der Wellenfunktionen finden ebene Wellen Verwendung. Die Rechtfertigung hierfür sieht Felsner wohl darin, daß der erlaubte ß-Zerfall sicher in $r \approx 0$ passiert und angenommen wird, daß auch die elektromagnetische Wechselwirkung nahe am Kern stattfindet. Die Raumintegration im Matrixelement der elektromagnetischen Wechselwirkung ergibt dann wieder wie in der KUB-Theorie eine δ-Funktion, so daß die nachfolgende $\sum_t$ ziemlich einfach wird. Das Ergebnis von Felsner enthält neben dem von Lewis und Ford gewonnenen Ergebnis (3) zusätzliche Glieder in (αZ). Dadurch ergab sich eine gute Übereinstimmung mit den Meßwerten.

Die Auswirkung der von Felsner gemachten Annahme auf seine Ergebnisse ist ziemlich unübersichtlich. Eine eingehende Nachprüfung der Berechtigung dieser Methode und des Ergebnisses schien daher am Platze zu sein.

Um zu einer mathematischen Überprüfung des Ergebnisses von Felsner zu gelangen, wurde das Spektrum der IB bis zu Gliedern linear in (αZ) exakt berechnet. Dabei wurde die Methode der Greenschen Funktion und die Sommerfeld-Maue-Wellenfunktion verwendet. Man erhält dann zwar im Matrixelement ein nicht elementar lösbares Integral, kann aber einsehen, daß die auftretenden Terme in nullter Ordnung von (αZ) (d.h. die Terme, die das KUB-Ergebnis liefern) reell sind, die Integrale der Ordnung (αZ) jedoch rein imaginär. Wie bei Spruch und Gold ergeben sich daher in $|\mathfrak{M}|^2$ hieraus nur Anteile der Ordnung $(\alpha Z)^2$.

Man erhält das Ergebnis:

$$(6) \quad \sum_{\text{Spins } e,\bar{\nu}} |\mathfrak{M}|^2 = F_{NR}(Z,E) \cdot \Big(\sum_{\text{Spins } e,\bar{\nu}} |\mathfrak{M}_{KUB}|^2 + \text{Glieder} \sim (\alpha^2 Z^2) \Big).$$

$F_{NR}(Z,E)$ ist die nichtrelativistische Fermifunktion und es ist in 1. Ordnung von (αZ)

$$F_{NR}(Z,E) \sim 1 + \pi \alpha Z \frac{E}{p} .$$

Damit ist eine Bemerkung von Pytte [15] bestätigt, daß nämlich das von Lewis und Ford in Bornscher Näherung erhaltene Ergebnis (3) in 1.Ordnung von (αZ) exakt gilt. Man kann weiter zeigen, daß dies neben den erlaubten Zerfällen auch für die eindeutig einfach verbotenen gilt. Somit führt die Methode von Felsner zu nicht korrekten Zusatzgliedern in 1.Ordnung von (αZ).

Auch von der physikalischen Seite her gelangt man zu einer kritischen Beurteilung des Ansatzes von Felsner. Sein Ergebnis scheint darauf hinzuweisen, daß die elektromagnetische Wechselwirkung nicht unmittelbar am Kernort erfolgt, wo der für die Wellenfunktion von Felsner verwendete Ansatz exakt gilt. Es erhebt sich hier also die Frage, in welcher Entfernung vom Kern die IB vorwiegend entsteht.

Um hierüber eine Aussage zu erhalten, wurde im Matrixelement der elektromagnetischen Wechselwirkung $\langle e,\gamma|H_\gamma|e_i\rangle$ aus (1) ein Abschirmfaktor e^{-r/r_0} eingeführt und das Spektrum der IB als Funktion von r_0 berechnet. Schon für Z = 0 wird die elektronisch durchgeführte numerische Auswertung recht langwierig; es wurde deshalb nur dieser Fall betrachtet, der sicher die richtigen Größenordnungen liefert. Für $r_0 \to \infty$ muß sich in diesem Fall die KUB-Theorie ergeben.

Die numerischen Ergebnisse für P^{32} und S^{35} sind in Figur 1 dargestellt. Man ersieht daraus, daß für beide Fälle die gesamte IB aus einem Bereich kommt, der vom Kern einen Abstand der Größenordnung 0,5 bis 10, gemessen in Einheiten $\hbar/mc = 3{,}86.10^{-11}$ cm, hat.

In der Arbeit von Felsner wird für den spinoriellen Anteil der Wellenfunktion des Elektrons der am Kernort gültige Ausdruck verwendet. Mit der Ortsfunktion $e^{i\underline{pr}}$ versehen wird dieser Ausdruck in das Matrixelement der elektromagnetischen Wechselwirkung eingesetzt. Über den Bereich hinweg, wo nach den obigen Überlegungen die elektromagnetische Wechselwirkung stattfindet, verhalten sich aber obere und untere Komponenten der Spinoren als Funktionen von r völlig verschieden. Es ist also auch von dieser Seite her einzusehen, daß der von Felsner gemachte Ansatz sicher nicht gerechtfertigt ist.

Die hier erhaltenen Ergebnisse bestätigen weiterhin auf eine andere Art eine schon bei der Diskussion der Arbeit von Vinh Mau gemachte Aussage über die Anteile der verschiedenen Drehimpulse des Lichtquants am Spektrum der IB. Es sei R der Abstand vom Kern,

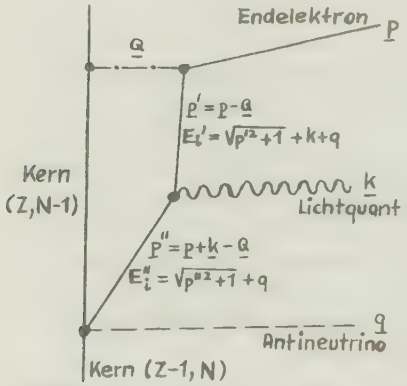
innerhalb dessen 90 % der IB entstehen. Dann ist der maximale, zum Spektrum noch wesentlich beitragende Drehimpuls des Lichtquants $L_{max} \approx k \cdot R$ für P^{32} ca. 10, für S^{35} ungefähr 2. Somit wird die Vinh-Mau-Drehimpulsentwicklung mit der (für die numerische Auswertung gemachten) Einschränkung L = 0 und 1 für S^{35} brauchbare Ergebnisse liefern, während für P^{32} mit L = 0 und 1 erhebliche Fehler zu erwarten sind. Genau das zeigte aber auch obiger Z = 0 - Test der Vinh-Mau-Theorie.

3) Gültigkeitsbereich der Bornschen Näherung für Coulombkorrekturen bei der IB

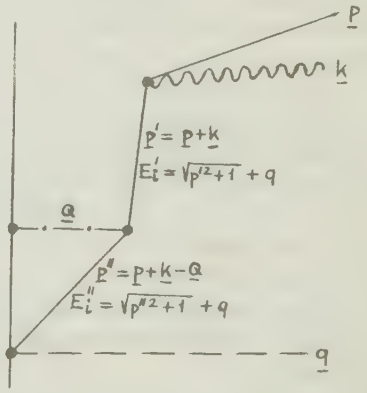
Die numerische Auswertung der exakten Theorie der Coulombkorrekturen zur IB von Vinh Mau erfordert schon für günstige Fälle, d.h. für kleine E_o-1, einen erheblichen Aufwand, der für große Grenzenergien ins Riesenhafte wachsen würde. Es soll deshalb versucht werden, eine Fehlerabschätzung für die wesentlich einfachere Theorie von Lewis und Ford zu gewinnen.

In dieser sind die Coulombfeldeffekte in Bornscher Näherung berücksichtigt. Die Anwendbarkeit der Bornschen Näherung auf ein Elektron der relativistischen Gesamtenergie E im Coulombpotential unterliegt der Bedingung [16] $\alpha Z \frac{E}{p} \ll 1$.

Zur näheren Untersuchung der Theorie von Lewis und Ford in Bezug auf diese Bedingung dient ein Impulsdiagramm:



(a) Coulombkorrekturen am Endzustand



(b) Coulombkorrekturen am Zwischenzustand

$\underline{Q}$ ist der durch die Coulombwechselwirkung auf den Kern übertragene Rückstoßimpuls. Solange in den Diagrammen keine geschlossenen Linien auftreten, ist der Impuls des Elektrons im Zwischenzustand durch den Impulssatz aus den Größen $\underline{p}$ und $\underline{k}$ des Endzustandes festgelegt. Für geschlossene Linien jedoch werden bei der entsprechenden Integration alle Impulswerte durchlaufen. Ein wesentlicher Beitrag des Integranden tritt aber nur in der Nähe des Resonanznenners*) auf mit $E_i \approx E_0 = E+k+q$. Für solche Werte sucht man die Bedingung für die Anwendbarkeit der Bornschen Näherung:

a 1) $E_i' = \sqrt{p'^2+1} + k+q \approx E+k+q$ ist erfüllt für $p' \approx p$

Bedingung für die Anwendbarkeit der Bornschen Näherung in diesem Fall: $\alpha Z \frac{E'}{p'} \approx \alpha Z \frac{E}{p} \ll 1.$

a 2) $E_i'' = \sqrt{p''^2+1} + q \approx E+k+q$ für $p'' \approx \sqrt{(E+k)^2-1}$

Bedingung: $\alpha Z \frac{(E+k)}{\sqrt{(E+k)^2-1}} \ll 1.$

b 1) $E_i'' = \sqrt{p''^2+1} + q \approx E+k+q$ für $p'' \approx \sqrt{(E+k)^2-1}$

Bedingung: $\alpha Z \frac{(E+k)}{\sqrt{(E+k)^2-1}} \ll 1.$

b 2) Hierbei ist $\underline{p}' = \underline{p} + \underline{k}$ schon durch die festen Werte $\underline{p}$ und $\underline{k}$ bestimmt. Es ist $\underline{p}' \approx 0$ nur für $p \approx k$ und $\vartheta = \sphericalangle(\underline{p},\underline{k}) \approx 180°$. Man kann aber einsehen, daß für diesen Bereich der Anteil der IB vernachlässigbar ist. Man erhält formal S(k) durch Integration aus

$$S(k) = \int_1^{E_0-K} dE \int_0^{\pi} d\vartheta \; 2\pi \sin\vartheta \; S(k,E,\vartheta).$$

Die Theorie von Lewis und Ford liefert dabei für die Winkelabhängigkeit:

$$S_{LF}(k,E,\vartheta) = f(E,k)\left\{\frac{2E^2+2Ek+k^2}{E-p\cos\vartheta} - (E+k)\left[1+\frac{1}{(E-p\cos\vartheta)^2}\right]\right\}.$$

---

*) Die Coulombwechselwirkung selbst ergibt einen Resonanznenner für $\underline{Q} = 0$. Dann ist aber $\underline{p}' = \underline{p}$ bzw. $\underline{p}' = \underline{p}+\underline{k}$. Das führt auch auf die in a 1) bzw. b 2) zu untersuchenden Beziehungen.

Den kleinsten Wert für $S_{LF}(k,E,\vartheta)$ erhält man im Bereich $0^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ$ für alle Wertepaare E und k stets für $\vartheta = 180^\circ$; zusätzlich kommt noch der Faktor $\sin\vartheta$ vom Raumwinkel hinzu, so daß der Beitrag für einen Bereich um $\vartheta = 180^\circ$ zum Integral unerheblich ist. Dieses Ergebnis erwartet man auch wegen der Ausstrahlungscharakteristik eines Dipols. Für den übrigen Winkelbereich kann man aber sagen, daß sicher $\alpha Z \frac{E'}{p'} \ll 1$, wenn $\alpha Z \frac{E}{p} \ll 1$ erfüllt ist.

Die Verwendung der Bornschen Näherung wird also bei der Berechnung von Coulombkorrekturen zur IB dann zu vernünftigen Ergebnissen führen, wenn die in a 1) bis b 2) sich ergebenden Bedingungen erfüllt sind, d.h. wenn

$$(7) \quad \alpha Z \frac{E}{p} \ll 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha Z \frac{E+k}{\sqrt{(E+k)^2-1}} \ll 1$$

erfüllt ist. Die Gültigkeit der ersten Bedingung schließt die der zweiten ein. Man sieht also, daß die Anwendbarkeit der Bornschen Näherung auf die Zwischenzustände durch die gleiche Bedingung festzulegen ist, wie für den Endzustand.

Man wird zu den Bedingungen (7) auch noch auf eine ganz andere Weise geführt, nämlich durch die bis (αZ) exakte Berechnung (Abschnitt 2c), die ja die Ergebnisse der Bornschen Näherung bestätigt. Bei dieser Berechnung sind die vernachlässigten Terme nicht alle echt von der Größenordnung $(\alpha Z)^2$, sondern von der Ordnung

$$\left(\alpha Z \frac{E}{p}\right)^2 \text{ und } \left(\alpha Z \frac{E+k}{\sqrt{(E+k)^2-1}}\right)^2.$$

Man gelangt also auch von dieser Seite zu den in (7) aufgeführten Einschränkungen für die Anwendbarkeit des bis zur Ordnung (αZ) exakten Ergebnisses.

Brauchbare Ergebnisse wird die Theorie von Lewis und Ford also liefern, solange $\alpha Z \frac{E}{p} \ll 1$ ist. Da der Elektronenimpuls im Endzustand nicht beobachtet wird, also formal

$$(8) \quad S(k) = \int_1^{E_0-k} S(k,E)\, dE$$

gilt, werden stets auch die kleinen Elektronenimpulse, für welche die Bornsche Näherung nicht mehr verwendbar ist, mit ins Spiel kommen. Sie werden jedoch im Integral in (8) relativ umso weniger beitragen, je größer der Integrationsbereich, d.h. $E_0 - k - 1$ ist.

Man kann somit den Schluß ziehen, daß durch die Verwendung der Bornschen Näherung bei der Berücksichtigung von Coulombkorrekturen zur IB umso kleinere Fehler verursacht werden, je größer E_0 ist, und für festes E_0, je kleiner k ist. Insbesondere sind dann die für P^{32} erhaltenen Ergebnisse eine bessere Näherung für exakte Werte als diejenigen für S^{35}. Dies wird im folgenden Abschnitt 4 wichtig werden.

4) Vergleich numerischer Ergebnisse und Zusammenfassung

Es werden nun numerische Ergebnisse der im vorliegenden Kapitel I besprochenen Arbeiten verglichen. Das Ziel ist, eine Aussage über die Größenordnung des bei der Verwendung der Bornschen Näherung auftretenden Fehlers zu erhalten.

Die Verwendung der Bornschen Näherung liefert die Coulombkorrekturen zur IB in 1. Ordnung von (αZ). Einen Teil der Korrekturen der Größenordnung $\left(\frac{\alpha Z}{p}\right)^2, \left(\frac{\alpha Z}{p}\right)^3, \ldots$ usw. kann man ohne Mühe angeben. Nach (6) gilt

$$S(k) = \int_1^{E_0-k} S(k,E)\,dE = \int_1^{E_0-k} F_{NR}(Z,E)\, S_{KUB}(k,E)\,\left(1 + \mathcal{O}(\alpha^2 Z^2)\right) dE .$$

$F_{NR}(Z,E)$ ist die nichtrelativistische Fermifunktion; die erste Ordnung von (αZ) liefert die Lewis-Ford-Theorie. Mit LFF soll nun das Ergebnis bezeichnet werden, bei dem die nichtrelativistische Fermifunktion exakt beibehalten wird und die übrigen Anteile wie bei Lewis und Ford bis zur 1. Ordnung von (αZ). Die nichtrelativistische Fermifunktion tritt durch die Verwendung der Sommerfeld-Maue-Wellenfunktion auf; die versuchsweise Einführung einer besseren Näherung [17] für die Fermifunktion ändert jedoch am numerischen LFF-Ergebnis praktisch nichts (im Normierungsintegral des ß-Zerfalls sind dabei die entsprechenden Korrekturen anzubringen).

In Figur 2 ist für S^{35} ($E_0-1 = 0.327$; $Z = 17$), für P^{32} ($E_0-1 = 3.34$; $Z = 16$) und einen fiktiven Fall ($E_0-1 = 33.4$; $Z=16$), welcher die auftretende Tendenz verdeutlichen soll, für das normierte Spektrum $S(k)/N$ ein Vergleich dargestellt jeweils zwischen der KUB-Theorie, der Theorie von Lewis und Ford und den LFF-Kurven.

Die LFF-Kurven sind dabei als Test für die Größenordnung der Abweichungen zu betrachten, die bei einer exakteren Behandlung des Coulombfeldes gegenüber der Bornschen Näherung auftreten. Diese Abweichungen zeigen die erwartete E_0-Abhängigkeit, sind also für S^{35}

größer als für P^{32}. Für E_o-1 = 33.4 wären sie bereits unerheblich.

Man muß nun allerdings berücksichtigen, daß die Differenzen zwischen den verschiedenen theoretischen Ergebnissen für das Spektrum S(k) durch den Normierungsfaktor N verkleinert werden, weil sich entsprechende Tendenzen für S(k) und N in etwa wieder aufheben. Gerade für die in den LFF-Kurven nicht berücksichtigten Korrekturen am Zwischenzustand ist dies nicht der Fall, weil diese Zustände beim ß-Zerfall, mit dem normiert wird, nicht auftreten. Es ist deshalb wesentlich, den hierdurch verursachten Fehler noch abzuschätzen. Hierzu wird an die Ergebnisse von Abschnitt 2 angeknüpft.

In Absatz b wurde dort für den Grenzfall Z = 0 ein Vergleich aufgestellt zwischen der von Vinh Mau verwendeten numerischen Näherung und der für Z = 0 exakten KUB-Theorie. Korrigiert man nun die für Z ≠ 0 von Vinh Mau für S^{35} erhaltenen Ergebnisse als Abschätzung mit den für Z = 0 bestimmbaren Abweichungen von der exakten Theorie, die ca. 5 bis 8 % betragen, so ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den Werten von Spruch und Gold. Hier scheinen somit ziemlich exakte theoretische Ergebnisse vorzuliegen.

In Figur 3 werden für S^{35} die LFF-Werte verglichen mit den korrigierten Vinh Mau-Werten, die innerhalb der Zeichengenauigkeit mit den Ergebnissen von Spruch und Gold zusammenfallen. Die Abweichungen betragen für größere k-Werte noch 15 bis 20 %, für kleine k besteht praktisch Übereinstimmung.

Wegen der oben gebrachten Argumente werden aber für P^{32} die Abweichungen der LFF-Kurve, die hier schon nahezu mit der Lewis-Ford-Theorie übereinstimmt, von den wirklichen Werten kleiner sein als für S^{35}, d.h. selbst am oberen Ende des Spektrums (bis $k \approx 2.5$) noch kleiner sein als 15 %. Dieser Schluß, der eigentlich nur für S(k) vollzogen werden kann, ist tatsächlich auch für das normierte Spektrum S(k)/N noch richtig, weil der Normierungsfaktor N hierbei fast ohne Einfluß ist. Dies liegt daran, daß bei Verwendung der nichtrelativistischen Fermifunktion praktisch schon der exakte Wert von N erreicht wird. Die noch auftretenden Diskrepanzen zwischen den LFF-Werten und exakten Ergebnissen werden also praktisch nur durch S(k) allein hervorgerufen.

Somit ist die Verwendung der Bornschen Näherung für die Berechnung von Coulombkorrekturen zur IB für P^{32} gerechtfertigt. Jedoch auch für wesentlich kleinere Grenzenergien E_o ergeben die LFF-Kurven noch brauchbare Ergebnisse, wie die für S^{35} erhaltenen Zahlen zeigen.

Die Diskrepanzen zwischen der Theorie von Lewis und Ford und den Meßwerten [4,6] betrugen für P^{32} über weite Teile des Spektrums um 50 ‰. Auch die späteren Messungen des normierten Spektrums *) ergaben Diskrepanzen dieser Größenordnung. Die in diesem Abschnitt durchgeführten Überlegungen zeigen aber, daß diese Abweichungen durch Coulombeffekte nicht zu klären sind. Für S^{35} ergab sich in Abschnitt 2b eine gleichartige Situation.

Es ist somit gezeigt, daß die Meßwerte für das Spektrum der IB auch bei Einbeziehung der Coulombkorrekturen in die Theorie nicht richtig beschrieben werden. Im folgenden Kapitel II werden deshalb weitere in der Theorie der IB auftretende Korrektureffekte untersucht, um hierbei nach Gründen für diese Abweichungen zu suchen.

---

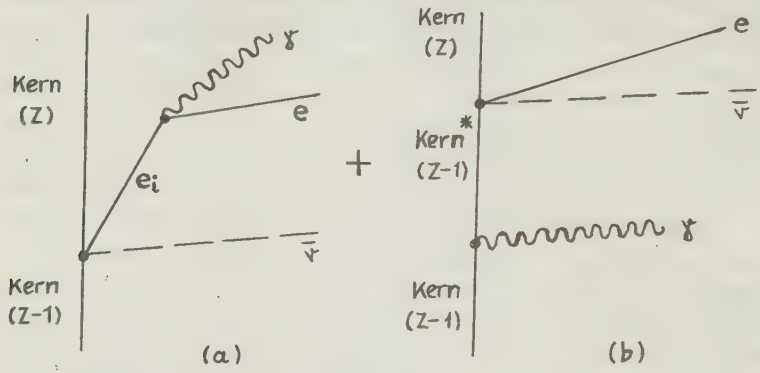
*) Literaturangaben hierzu findet man bei Persson, Nucl. Phys. 55, S.49. Bei der Arbeit von Hakeem und Goodrich (Nucl. Phys. 31, S.322), die als einzige Übereinstimmung mit der Lewis-Ford-Theorie berichten, handelt es sich dabei um Relativwerte, die in einem Punkt an die Theorie angepaßt wurden. Die gefundene Übereinstimmung bezieht sich also nur auf die Form des Spektrums.

Kap. II Weitere Korrektureffekte

1) Angeregter Kernzwischenzustand, Doppel-IB und Einfluß von Neutrinogrößen

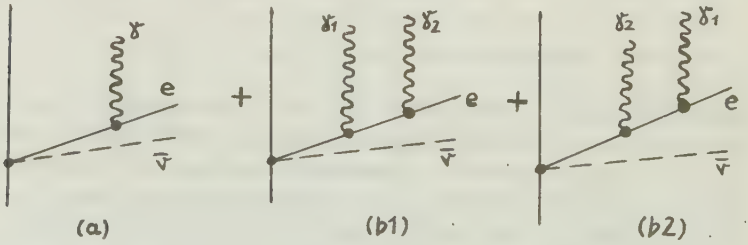
Einige in der Theorie der IB auftretende Korrektureffekte wurden bereits von anderen Autoren untersucht.

Longmire [18] hat sich mit dem durch folgende Graphen beschriebenen Prozeß befaßt:



In (b) tritt ein Kernzwischenzustand auf, (a) liefert die normale KUB-Theorie. Es zeigte sich, daß ein merklicher Anteil aus (b) allenfalls für höher verbotene Übergänge zu erwarten ist.

Von Thun et al. [19] wurde der Beitrag der IB unter Entstehung von 2 Lichtquanten betrachtet:

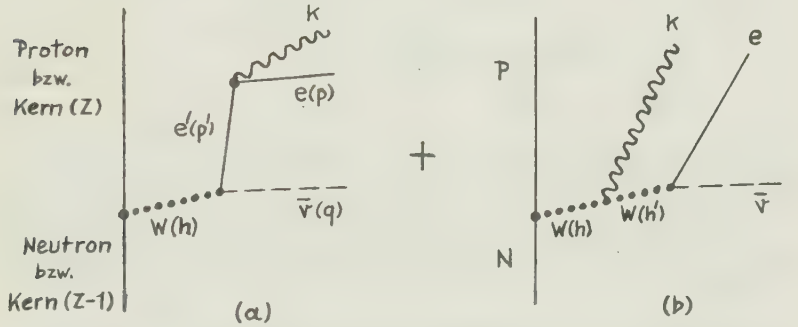


Es wurde gefunden, daß die sog. Doppel-IB (b) zur KUB-Theorie (a) einen Beitrag der relativen Größenordnung 10^{-4} liefert.

Weneser [20] und Gold und Spruch [21] haben gezeigt, daß der Einfluß der endlichen Ruhemasse und des magnetischen Moments des Antineutrinos $\bar{\nu}$, falls diese Größen existieren, vernachlässigbar ist, wenn man die obere aus Experimenten zu entnehmende Grenze dieser Größen einsetzt.

2) Der Einfluß eines eventuell auftretenden intermediaren Bosons

Als möglicher Korrektureffekt bei der IB schon genannt [12], aber noch nicht untersucht, wurde der Einfluß eines eventuell beim ß-Zerfall auftretenden Vektorbosons auf die IB. Die zugehörigen Graphen sehen dabei so aus:



Mit den Rechenregeln für Vektorbosonen [22] findet man in Feynmanscher Schreibweise für die entsprechenden Matrixelemente bei erlaubtem ß-Zerfall:

$$\mathcal{M}_a = -if^2\sqrt{\alpha}\,\bar{U}(p)\not{\varepsilon}\,\frac{1}{p'-m}\,\gamma_\beta(1+i\gamma_5)\,U(q)\,\frac{\delta_{\beta\alpha}-h_\beta h_\alpha/M^2}{h^2-M^2}\,B_\alpha$$

$$\mathcal{M}_b = if^2\sqrt{\alpha}\,\bar{U}(p)\,\gamma_\sigma(1+i\gamma_5)\,U(q)\,\frac{\delta_{\sigma\varrho}-h'_\sigma h'_\varrho/M^2}{h'^2-M^2}\,e_\mu(\Gamma_\mu)_{\varrho\beta}\,\frac{\delta_{\beta\alpha}-h_\beta h_\alpha/M^2}{h^2-M^2}\,B_\alpha$$

Dabei ist $f^2/M^2 = g_V/\sqrt{2}$; M ist die Masse des intermediären Bosons, m die des Elektrons. Folgende Viererimpulse wurden eingeführt:

$$p' = p+k\ ,\quad h = p'+q\ ,\quad h' = p+q\ .$$

Es ist $h^2 = h_4 h_4 - \underline{h}\underline{h} = (E+k+q)^2 - (\underline{p}+\underline{k}+\underline{q})^2 < 2(E+k+q)^2 = 2E_o^2$.
Also ist $h^2 < 2E_o^2$ und auch $h'^2 < 2E_o^2$, wobei E_o die Grenzenergie des ß-Zerfalls ist. Weiter gilt:

$$(\Gamma_\mu)_{\varrho\beta} = (h+h')_\mu \delta_{\varrho\beta} - h'_\beta \delta_{\mu\varrho} - h_\varrho \delta_{\mu\beta} \qquad \text{und}$$

$$B_\alpha = \int_{\text{Kernvol.}} \overline{\Psi}_P(\underline{r})\, \gamma_\alpha\, (1 - i \tfrac{g_A}{g_V} \gamma_5)\, \Psi_N(\underline{r})\, d\tau .$$

E_o hat die Größenordnung einiger Energieeinheiten mc^2, z.B. 4.34 für P^{32} oder 1.327 für S^{35}. Als untere Grenze für die Masse M eines beim ß-Zerfall eventuell auftretenden Bosons erhält man [23] $M > 3{,}3 \cdot 10^3$ ($\hat{=}$ 1.7 GeV). Es ist dann aber leicht einzusehen, daß wegen

$$\mathfrak{M}_a = \mathfrak{M}_{KUB}\,(1 + \mathcal{O}(\tfrac{E_o^2}{M^2})) \qquad \text{und}$$

$$\mathfrak{M}_b = \mathcal{O}(\tfrac{E_o^2}{M^2})$$

der Einfluß eines Bosons auf die IB höchstens von der relativen Größenordnung 10^{-6} ist.

Die entsprechenden Korrekturen zum ß-Zerfall [24] sind dann analog zu $\mathfrak{M}_a$ sofort hinzuschreiben und natürlich von gleicher Größenordnung klein.

Die Fermi-Wechselwirkung kann also bei der Berechnung der IB ohne weiteres als lokal angesehen werden. Rückschlüsse auf die Existenz eines intermediären Bosons durch Vergleich theoretischer Ergebnisse mit Meßwerten sind bei den beim ß-Zerfall und der IB umgesetzten Energien der Größenordnung einiger MeV nicht möglich.

3) Die Berücksichtigung der endlichen Kerngröße

Bei der Untersuchung des Einflusses der endlichen Kerngröße auf die Theorie der IB mit reinem Coulombfeld werden die für den ß-Zerfall abgeleiteten entsprechenden Bezeichnungen und Formeln [25] verwendet. Es sei konstante Ladungsdichte im Kern vorausgesetzt; dann ist:

$$V(r) = -\frac{\alpha Z}{2\varrho}\,(3 - (\tfrac{r}{\varrho})^2) \qquad r \le \varrho$$

$$= -\frac{\alpha Z}{r} \qquad r \ge \varrho$$

Der Kernradius ϱ ist dabei von der Größenordnung 10^{-2}.

Es ist leicht einzusehen, daß bei einer Aufspaltung der Elektronenwellenfunktion des Endzustandes nach Drehimpulsen [8] gemäß $\psi = \sum_{\kappa,\mu} \psi_\kappa^\mu$ ($j = |\kappa| - \frac{1}{2}$ ist der Gesamtdrehimpuls, μ seine z-Komponente) keine Interferenzterme im Spektrum der IB auftreten, daß also formal

$$S(k) = \sum_{\kappa,\mu} S_\kappa^\mu(k) \qquad \text{(9)}$$ ist.

Somit darf man jedes einzelne κ und μ getrennt behandeln.

Im Außenraum, d.h. für $r \geq \varrho$, kommen nun zu den regulären Lösungen im Coulombfeld noch die irregulären dazu. Es gilt für

$$r \geq \varrho: \quad \psi_\kappa^\mu = a_\kappa \psi_\kappa^{\mu\,(\text{regulär})} + b_\kappa \psi_\kappa^{\mu\,(\text{irregulär})} \quad \text{statt } \psi_\kappa^{\mu\,(\text{regulär})}$$

Im Kerninneren ist für

$$r \leq \varrho: \quad \psi_\kappa^\mu = c_\kappa \psi_\kappa^{\mu\,(in)},$$

wobei der Radialanteil der Spinorkomponenten von $\psi_\kappa^{\mu\,(in)}$ in Form einer Integralgleichung anzugeben ist, die auf Rose [26] zurückgeht. Es ergibt sich, daß für

$$r \leq \varrho: \quad \psi_\kappa^\mu = \psi_\kappa^{\mu\,(\text{regulär})} \left(1 + \mathcal{O}(\alpha^2 Z^2)\right).$$

In $r = \varrho$ sind diese Lösungen an die entsprechenden Lösungen im Außenraum anzupassen. Hieraus folgt [25], daß $a_\kappa \approx 1$ und b_κ für ein Elektron mit Bahndrehimpuls l von der Größenordnung $(\alpha Z)^2 \cdot (p\varrho)^{2l+1}$ ist *), wobei p der Impuls des Elektrons ist. Der für alle Wellenfunktionen auftretende Korrekturfaktor ist also höchstens von der Größenordnung $p\varrho\,(\alpha Z)^2 \approx 10^{-4}$ **).

Diese Abschätzung gilt dabei auch für die Greensche Funktion, da diese nach (5) als $\sum_i \frac{|i\rangle\langle i|}{(E+k)-E_i}$ aus den Coulombfeld-Wellenfunktionen aufgebaut ist.

---

*) $(p\varrho)^{2l+1}$ ist das Verhältnis der sphärischen Bessel- zur sphärischen Hankelfunktion jeweils mit dem Index l für $r = \varrho$.

**) Zahlenangaben beziehen sich stets auf $(\alpha Z) \approx 0{,}1$; dies ist z.B. für S^{35} und P^{32} gut erfüllt.

4) Durch die Elektronenhülle verursachte Effekte

Durch die Anwesenheit der Elektronenhülle werden mehrere Effekte verursacht, die die Ergebnisse der Theorie mit reinem Coulombfeld verändern.

a) Greensche Funktion und besetzte Schalen

Die Greensche Funktion $\sum_i \frac{|i\rangle\langle i|}{(E+k)-E_i}$ aus (5) enthält eine Summation über alle freien und gebundenen Zwischenzustände. Nun sind aber tatsächlich die innersten Schalen schon besetzt, die davon herrührenden Anteile müssen also bei der Berechnung von der Greenschen Funktion abgezogen werden.

Für diese besetzten Schalen ist aber der Prozeß möglich, daß zuerst das gebundene Elektron durch die elektromagnetische Wechselwirkung in das Kontinuum gelangt und dann die entstandene Lücke durch L-Zerfall gefüllt wird. Hierdurch werden genau die für besetzte Zustände zu streichenden Summenterme in der Greenschen Funktion ersetzt, so daß es richtig ist, die $\sum_i$ über alle Zustände zu erstrecken. Dies wurde von Glauber und Martin schon für einen ähnlichen Fall verwendet [9].

Diese Überlegung ist bei verfeinerter Betrachtung nicht mehr richtig. Der in der Greenschen Funktion enthaltene fiktive Prozeß, der über die in Wirklichkeit schon besetzte K-Schale verlaufen würde, würde dies beim Tochterkern der Ordnungszahl Z tun. Das Matrixelement hierfür lautet formal

$$(\alpha)\quad \langle e(Z),\gamma|H_\gamma|e_K(Z)\rangle\langle e_K(Z),\mathrm{Kern}(Z),\bar\nu|H_\beta|\mathrm{Kern}(Z-1)\rangle\,\frac{1}{(E+k)-1}$$

Die Z-Abhängigkeit der Elektronenwellenfunktion wurde hierbei explizit angegeben; für die Energie des K-Schalen-Elektrons $E_K = \sqrt{1-(\alpha Z)^2}$ darf 1 gesetzt werden.

Der tatsächlich auftretende Ersatzprozeß jedoch geht von einem K-Elektron des Mutterkerns der Ordnungszahl Z-1 aus, welches ins Kontinuum gelangt. Formal:

$$(\beta)\quad \langle e_K(Z),\mathrm{Kern}(Z),\bar\nu|H_\beta|\mathrm{Kern}(Z-1)\rangle\langle e(Z-1),\gamma|H_\gamma|e_K(Z-1)\rangle\,\frac{1}{(E+k)-1}$$

Die beiden Terme (α) und (ß) heben sich nicht mehr exakt gegenseitig auf.

Zur Abschätzung des Einflusses dieses Effektes wurde der Anteil (α) der K-Schale zur Greenschen Funktion untersucht. Es ergibt sich, daß dieser von der Größenordnung $(\alpha Z)^4$ ist. $(\alpha Z)^3$ kommt von der Normierung des K-Elektrons, einen weiteren Faktor (αZ) ergibt die Raumintegration in $\mathfrak{M}$. Für das Matrixelement (β) ist bei der entsprechenden Berechnung teilweise Z durch Z-1 zu ersetzen.

Bei der Verwendung des für die besetzte K-Schale tatsächlich auftretenden Terms (β) anstelle von (α) in der Greenschen Funktion tritt dann ein Korrekturterm der relativen Größenordnung

$$(\alpha Z)^4 - (\alpha(Z-1))^4 \sim (\alpha Z)^4 \cdot \frac{1}{Z}$$

auf.
Insgesamt sind (Z-1) Hüllenelektronen vorhanden. Man kann deren Einfluß dann summarisch beschreiben durch einen Korrekturfaktor der Größenordnung $(\alpha Z)^4 \cdot \frac{1}{Z}(Z-1) \approx (\alpha Z)^4 \approx 10^{-4}$, der vernachlässigbar ist.

b) Der Zweielektronen-Endzustand

Es werde nun der Vorgang betrachtet, daß neben dem ß-Zerfallselektron ein Elektron aus einer besetzten Schale durch die elektromagnetische Wechselwirkung ebenfalls in das Kontinuum gelangt.

Dies ist auf folgende Arten möglich:

	Anfangszustand:		Zwischenzustand:		Endzustand:
(α)	Neutron	H_β	Proton, Antineutrino, Elektron	H_γ	Proton, Antineutrino, Elektron
	Hüllenelektron		Hüllenelektron		Elektron', Lichtquant
(β)	Neutron		Neutron	H_β	Proton, Antineutrino, Elektron
	Hüllenelektron	H_γ	Elektron', Lichtquant		Elektron', Lichtquant

(γ) (δ) durch Vertauschung von Elektron und Elektron' in (α) (β)

Die Matrixelemente der Prozesse (α) und (ß) lauten:

$$\mathfrak{M}_\alpha = \frac{\langle \gamma e' e P \bar{\nu} | H_\gamma | \bar{\nu} e^H e P \rangle \langle \bar{\nu} e^H e P | H_\beta | e^H N \rangle}{E_{Endzustand} - E_{zwischenzustand}} = \frac{\langle e' \gamma | H_\gamma | e^H \rangle \langle e P \bar{\nu} | H_\beta | N \rangle}{E' + K - E^{Hülle}}$$

$$\mathfrak{M}_\beta = \frac{\langle \gamma e' e P \bar{\nu} | H_\beta | N e' \gamma \rangle \langle N e' \gamma | H_\gamma | N e^H \rangle}{E_{Anfangszustand} - E_{zwischenzustand}} = \frac{\langle e P \bar{\nu} | H_\beta | N \rangle \langle e' \gamma | H_\gamma | e^H \rangle}{E^{Hülle} - E' - K}$$

Man sieht also, daß $\mathfrak{M}_\beta = - \mathfrak{M}_\alpha$ und, da für $\mathfrak{M}_\gamma$ und $\mathfrak{M}_\delta$ entsprechendes gilt, der Zweielektronenendzustand somit überhaupt nicht auftreten dürfte.

In einer verfeinerten Betrachtung muß aber genau wie im vorhergehenden Abschnitt a) berücksichtigt werden, daß das in (α) und (ß) auftretende Kerncoulombfeld nicht exakt das gleiche ist. Hierdurch ergibt sich aus (α) und (ß) ein Beitrag, der von der relativen Ordnung $\frac{1}{Z}(\alpha Z)^{5/2}$ ist. Die Normierung des Hüllenelektrons ergibt dabei einen Faktor $(\alpha Z)^{3/2}$, die Integration im Matrixelement der elektromagnetischen Wechselwirkung zusätzlich einen Faktor (αZ). Für die Prozesse (γ) und (δ) gilt das Gleiche.

Die Berücksichtigung aller Hüllenelektronen ergibt somit zum Spektrum der IB einen Beitrag der Ordnung $(\alpha Z)^5 \approx 10^{-5}$, der vernachlässigbar ist.

Der hier beschriebene Effekt wurde auf eine andere Art [27] ohne direkte Berücksichtigung der IB als Autoionisation beim ß-Zerfall schon untersucht.

Es sei noch der Prozeß erwähnt, daß eines der beiden Elektronen, die in (α), (ß), (γ) und (δ) ins Kontinuum gelangen, statt dessen in eine vorher unbesetzte Schale geht. Wegen des zusätzlichen Normierungsfaktors dieses gebundenen Endelektrons ergibt sich aber für das Spektrum der IB nur ein Beitrag, der von der Größenordnung $(\alpha Z)^3 \approx 10^{-3}$ kleiner ist als der Beitrag des Zweielektronen-Endzustandes.

c) Das gebundene Endelektron

Als weiterer Effekt der Elektronenhülle kommt hinzu, daß das Elektron im Endzustand in eine unbesetzte Schale gelangen kann.

Als Abschätzung wurde dieser Effekt zuerst für die (bei Tochterkernen mit $Z > 2$ schon besetzte) K-Schale berechnet. Man kann in

niedrigster nichtverschwindender Ordnung von (αZ) die nichtrelativistischen Wellenfunktionen verwenden und erhält

$$|\mathfrak{M}|^2 \sim |\mathfrak{M}_{KUB}|^2 (\alpha Z)^3 .$$

Der Faktor $(\alpha Z)^3$ kommt durch die Normierung der Elektronenwellenfunktionen herein.

Allgemein gilt für $l = 0$ und für Hauptquantenzahl n

$$\psi_{l,n} \sim e^{-\frac{\alpha Z}{n} r} \left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^{3/2} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^{5/2}\right] .$$

Somit ist für die Wellenfunktionen mit $l = 0$ unter Einbeziehung aller Schalen

$$\sum_{n(l=0)} |\mathfrak{M}|^2 \sim \sum_{n} |\mathfrak{M}_{KUB}|^2 \frac{(\alpha Z)^3}{n^3} \sim |\mathfrak{M}_{KUB}| (\alpha Z)^3 . \quad *)$$

Für $l \neq 0$ ist größenordnungsmäßig

$$\psi_{l,n} \sim \left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^{3/2+l} \frac{1}{(2l+1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!}{n(n-l-1)!}} < \left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^{3/2+l} .$$

Die Anteile mit $l > 0$ sind also von der Größenordnung $(\alpha Z)^l$ kleiner als die mit $l = 0$. Somit ist insgesamt der Anteil derjenigen Endelektronen an der IB, die in gebundene Zustände übergehen, vernachlässigbar gegen den Anteil der ins Kontinuum gelangenden Elektronen und zwar von der relativen Größenordnung $(\alpha Z)^3 \approx 10^{-3}$.

Dieselbe Größenordnung ergibt sich für den ß-Zerfall, mit dem ja normiert wird.

d) Abschirmkorrekturen

Bei der Untersuchung der Abschirmeffekte der Hüllenelektronen auf das Coulombfeld werden zu einem Teil die Überlegungen zu diesem Effekt beim erlaubten ß-Zerfall [28,29] verwendet.

---

*) Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1.202$. Dabei sind die bereits besetzten Schalen, in die das Endelektron nicht gelangen kann, noch mitgezählt. Beispielsweise sind für S^{35} oder P^{32} die $l = 0$-Zustände der K, L- und M-Schale abzuziehen, so daß hierbei $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 0.04$ zu verwenden wäre.

Das abgeschirmte Coulombfeld wird hierbei durch das Thomas-Fermi-Modell [30] beschrieben. In Figur 4 ist die Differenz zwischen dem Coulombpotential und dem abgeschirmten Potential nach Thomas-Fermi aufgetragen in Abhängigkeit vom Abstand vom Kern. Für P^{32} und S^{35} mit $Z \approx 16$ ist für $r \lesssim 50$ diese Differenz relativ zu den Potentialen selbst ziemlich konstant. Für die Rechnung wird nun angenommen, daß diese Differenz für $r \lesssim 50$ konstant ist; für $r \gtrsim 50$ findet das WKB-Verfahren Anwendung.

Diese Methode ist auch auf die Abschirmeffekte bei der IB anwendbar, weil praktisch die gesamte IB im Bereich $r \lesssim 50$ entsteht (siehe Fig. 1). Weiter treten beim erlaubten ß-Zerfall nur Wellenfunktionen auf, die Elektronen mit Gesamtdrehimpuls $j = 1/2$ beschreiben; bei der IB jedoch müssen für das Endelektron auch höhere Drehimpulse in Betracht gezogen werden. Wegen der schon in Abschnitt 2 dieses Kapitels verwendeten Beziehung für das IB-Spektrum

$$(9) \qquad S = \sum_{\kappa,\mu} S_\kappa^\mu$$

darf man dabei jedes ψ_κ^μ einzeln behandeln.

Um die Anwendbarkeit der WKB-Methode zu untersuchen, schreibt man $\psi_\kappa^\mu = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} u_1 \chi_\kappa^\mu \\ i u_2 \chi_{-\kappa}^\mu \end{pmatrix}$, wobei etwa u_1 die Gleichung [8]

$$\frac{d^2u_1}{dr^2} + \frac{du_1}{dr}\frac{dV/dr}{W+1-V} + \left[(W-V)^2 - 1 - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} + \frac{\kappa}{r}\frac{dV}{dr}\frac{1}{W+1-V}\right]u_1 = 0$$

erfüllt und u_2 hieraus eindeutig bestimmt ist. W ist dabei die Gesamtenergie des Elektrons. Für die durch die Transformation [28]

$$(10) \qquad v_1 = \frac{u_1}{\sqrt{W+1-V}}$$

gegebene Funktion v_1 ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$(11) \qquad \frac{d^2v_1}{dr^2} + k_0^2(r) \cdot v_1 = 0$$

mit $$k_0^2(r) = -\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dr^2}\frac{1}{W+1-V} - \frac{3}{4}\left(\frac{dV}{dr}\right)^2\frac{1}{(W+1-V)^2} + (W-V)^2 - 1 - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} + \frac{\kappa}{r}\frac{dV}{dr}\frac{1}{W+1-V}.$$

Für die Lösung von (11) ist wegen des Nichtauftretens der 1. Ableitung die WKB-Methode verwendbar, falls noch die Bedingung

$$(12)\quad \left|\frac{dk_0(r)}{dr}\right| \ll k_0^2(r)$$

erfüllt ist.

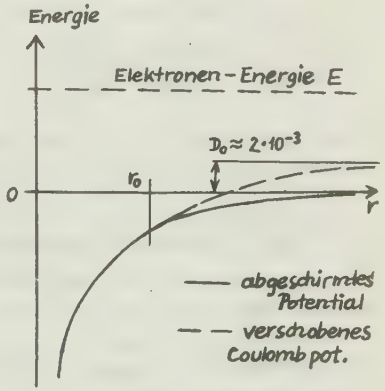
Für P^{32} wird mit $|\varkappa| \lesssim 10$ für den Endzustand praktisch die gesamte IB erfaßt *). Für $p \gtrsim 0.32$ ist dann Bedingung (12) für das Coulombpotential für $r \gtrsim 50$ gut erfüllt; der Anteil der IB für $p \lesssim 0.32$ beträgt selbst für $k = 2{,}5$ weniger als 10 % **). Bei S^{35} genügt es, $|\varkappa| \lesssim 2$ anzunehmen, so daß hier die Beschränkung $p \gtrsim 0.1$ für die Erfüllung der Beziehung (12) hinreicht. Auch hierbei werden noch für $k = 0.25$ über 90 % der Ib erfaßt **).

Bedingung (12) ist demnach bei S^{35} und P^{32} trotz den verschiedenen Grenzenergien für $r \gtrsim 50$ beidemale gut erfüllt, so daß die WKB-Methode in diesem Bereich angewendet werden kann.

Es wird nun für $r \lesssim 50$ als abgeschirmtes Potential [28,29] $V_a = -\frac{\alpha Z}{r} + D_0$ verwendet, wofür man sofort die Wellenfunktion angeben kann. Diese ist die reguläre Lösung im Coulombfeld $V = -\frac{\alpha Z}{r}$ mit der verschobenen Energie $E - D_0 = E'$ (Fig. 5). Es gilt also für die zur Anwendung der WKB-Methode geeigneten v_1

$$(13)\quad v_1^a(r) = M \cdot v_1^v(r) \quad \text{für } r \lesssim r_0 = 50.$$

Die Indizes a und v beziehen sich auf abgeschirmtes und verschobenes Coulombpotential; M ist ein noch zu bestimmender Normierungsfaktor.



Figur 5 nach Longmire [29]

*) Aus Fig. 1 wurde gefolgert, daß dies gilt, wenn für das Lichtquant $L \lesssim 10$ ist. Nichtverschwindende Matrixelemente $\mathfrak{M}_{\varkappa,L}$ treten aber nur im Bereich $|\varkappa| = L,\ L \pm 1,\ L \pm 2$ auf.

**) Dies wurde an den von Lewis und Ford in Bornscher Näherung erhaltenen Ergebnissen numerisch nachgeprüft.

Für $r \to \infty$ muß die Elektronenwellenfunktion eine ebene Welle darstellen. Aus der Zerlegung der ebenen Welle nach den ψ_κ^μ erhält man [8] für die für die WKB-Methode geeigneten v_1 (bis auf in diesem Fall unwesentliche Phasenfaktoren):

$$(14) \qquad \left.\begin{aligned} v_1^v &\to \frac{1}{\sqrt{2E'}} \frac{1}{k_o^v} \sin(k_o^v r + \delta_v) \\ v_1^a &\to \frac{1}{\sqrt{2E}} \frac{1}{k_o^a} \sin(k_o^a r + \delta_a) \end{aligned}\right\} \text{ für } r \to \infty$$

Dabei ist $k_o^v = p' = \sqrt{E'^2 - 1}$ und $k_o^a = p$.

Nun werden diese Lösungen v_1 mit der WKB-Methode hinein bis r_o verfolgt; dort gilt dann mit den in (11) definierten $k_o(r)$, wenn unter v_1 (∞) die Maximalamplituden der in (14) angegebenen Sinusfunktionen verstanden werden:

$$\frac{v_1^a(r_o)}{v_1^v(r_o)} = \frac{v_1^a(\infty)}{v_1^v(\infty)} \sqrt{\frac{k_o^a(r_o)\, k_o^v(\infty)}{k_o^a(\infty) k_o^v(r_o)}} \,.$$

Dabei ist $k_o{}^a(r_o) = k_o{}^v(r_o)$, weil dort die Potentiale gleich sind; weiter gilt:

$$k_o^{a/v}(\infty) = k_o^{a/v} \,.$$

Da die Beziehung (13) auch noch für $r = r_o$ gilt, ist somit

$$(15) \qquad M = \frac{v_1^a(r_o)}{v_1^v(r_o)} = \sqrt{\frac{E'p'}{Ep}} \,.$$

Mit diesem Faktor ist also jedes ψ_κ^μ aus dem Endzustand zu multiplizieren; gleichzeitig ist die Ersetzung $p \to p'$ zu machen.

Man erhält daraus sofort die Korrekturen beim ß-Zerfall [28,29]. Bei der IB treten jedoch auch noch Zwischenzustände auf.

Um hier zu einer quantitativen Aussage zu gelangen, geht man nach Glauber und Martin [9] aus von einem Hulthen-Potential

$V_H = -(\alpha Z) \cdot \frac{e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}}$, das ebenfalls ein Modell für ein abgeschirmtes Coulombfeld darstellt (der Verlauf ist ähnlich wie beim Thomas-Fermi-Potential). Für kleine r ist $V_H \approx -\frac{\alpha Z}{r} + \frac{1}{2}\delta\alpha Z = -\frac{\alpha Z}{r} + D_o$ für $\gamma \approx 4 \cdot 10^{-2}$. Dann ist die Greensche Funktion für erlaubten ß-Zerfall, wo nur die $j = \frac{1}{2}$ - Anteile auftreten, im abgeschirmten Coulombfeld [9]

$$G_a(E, \underline{r}) = G(E - D_o, \underline{r}) \cdot (1 + \mathcal{O}(\xi^2)) \,,$$

wobei $\xi = 2 D_o \frac{E+k}{(E+k)^2 - 1} \approx 4 \cdot \frac{E+k}{(E+k)^2 - 1} \cdot 10^{-3}$ ist.

Es kann demnach einfach die Greensche Funktion für das verschobene Coulombpotential verwendet werden. Der dadurch verursachte Fehler ist sehr klein und insbesondere für P^{32} kleiner als für S^{35} *).

Die Effekte der Abschirmung des Coulombfeldes sind jetzt unmittelbar anzugeben; mit $E' = E - D_0$ gilt:

(a) ß-Zerfall [28,29]: Es ist ohne Abschirmkorrekturen

$$N \sim \int_1^{E_0} F(Z,E) \cdot (E_0-E)^2 \cdot p \cdot E \cdot dE \,.$$

In den Wellenfunktionen ist nun p durch p' zu ersetzen (nicht in den Phasenraumfaktoren!); außerdem ist mit $|M|^2$ aus (15) zu multiplizieren, d.h.

$$F(Z,E) \xrightarrow[\text{durch}]{\text{zu ersetzen}} F(Z,E') \; \frac{E'\,p'}{Ep} \,.$$

Die Korrekturen sind sehr klein, da $D_0 \approx 2.10^{-3}$ ist; Schwierigkeiten für $p \to 0$ ergeben sich nicht.

(b) IB: hier ist

$$S(k) \sim \int_1^{E_0-k} F(Z,E) \cdot S_0(k,E) \cdot (E_0 - E - k)^2 \cdot p \cdot E \cdot dE \,.$$

Einbeziehung der Abschirmkorrekturen geschieht dann durch

$$F(Z,E)\; S_0(k,E) \xrightarrow[\text{durch}]{\text{zu ersetzen}} F(Z,E')\; S_0(k,E')\; \frac{E'\,p'}{Ep}$$

Zwar ist $S_0(k,E)$ exakt nicht bekannt, doch weiß man aus (6), daß bis auf Glieder der Größenordnung $(\alpha Z)^2$

$$S_0(k,E) = \frac{1}{p \cdot E}\,(2E^2 + 2Ek + k^2)\,\ln\,(E + p) - 2\,\frac{E + k}{E} \quad \text{ist.}$$

---

*) Der Grund hierfür liegt darin, daß die Abschirmkorrekturen für Elektronen sehr klein sind, was für Positronen mit kleinen Impulsen nicht mehr gilt [29]. Die entsprechenden Zwischenzustände mit negativer Energie werden aber wegen des Resonanznenners $\frac{1}{E+k-E_i}$ in der Greenschen Funktion umso stärker zum Spektrum beitragen, je kleiner die Zerfallsgrenzenergie ist. Dies wurde in der KUB-Theorie explizit nachgeprüft, wo sich der Anteil der Zwischenzustände mit negativer Energie bei P^{32} ($E_0 - 1 = 3{,}34$) für alle k auf weniger als 5 % beläuft; bei S^{35} ($E_0 - 1 = 0{,}327$) beträgt er jedoch bis teilweise über 20 %.

Es ist $\lim_{p \to 0} S_o(k,E) = k^2$, so daß die Ersetzung $E \to E'$ auch für kleine p keine nennenswerten Korrekturen liefert. Insgesamt sind also die durch die Abschirmung des Coulombfelds hervorgerufenen Korrekturen von der Größenordnung $D_o \approx 10^{-3}$ und somit vernachlässigbar. Die Kleinheit des Effektes liefert außerdem eine nachträgliche Berechtigung für die Verwendung von Näherungen für das abgeschirmte Potential.

Schlußbetrachtungen und Zusammenfassung

Die experimentellen Ergebnisse für das normierte Lichtquantenspektrum der IB schienen anfangs in Einklang mit der KUB-Theorie zu stehen. Spätere Messungen, die immer weitere Bereiche der Lichtquantenenergie einbezogen, widersprachen jedoch der Theorie. Die Berechnungen von Lewis und Ford, die das vorher vernachlässigte Kerncoulombfeld in Bornscher Näherung berücksichtigten, ergaben keine Erklärung dieser Diskrepanzen. Selbst für den Sonderfall S^{35}, wo exaktere theoretische Werte vorlagen, bestanden über weite Teile des Spektrums noch erhebliche Differenzen [10,12]. Dies war der Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit.

In Kapitel I wurde gezeigt, daß diese Diskrepanzen durch Effekte des reinen Coulombfeldes nicht zu erklären sind.

Es wurde deshalb in Kapitel II eine Reihe von weiteren Effekten untersucht. Die sich dabei ergebenden Korrekturen erreichten in keinem Fall auch nur annähernd die Größenordnung der noch bestehenden Diskrepanzen. Die Meßwerte des normierten Lichtquantenspektrums werden durch die theoretischen Erget isse also nicht richtig beschrieben.

Jedoch auch von der experimentellen Seite her gaben die bestehenden Diskrepanzen Anlaß zu weiteren Untersuchungen. Da in den letzten Jahren die Meßapparaturen stark verbessert wurden, so daß nun auch für kleinere Intensitäten noch vernünftige Aussagen möglich sind, konnte man zur Messung von differentiellen Winkelkorrelationsspektren übergehen. Elektron und Lichtquant werden dabei in Koinzidenz unter dem definierten Winkel ϑ nachgewiesen bei zusätzlicher Selektion der Lichtquantenenergie und zum Teil auch noch eines Bereiches der Elektronenenergie [31,32,33].

Die in Kapitel I,3 und 4 der vorliegenden Arbeit erhaltenen Aussagen über die Verwendbarkeit der Bornschen Näherung für die Berechnung von Coulombkorrekturen bei der IB sind nun auch für die Winkelkorrelationsspektren zu übernehmen, was nicht im einzelnen ausgeführt werden soll. Insbesondere ist für P^{32} die Verwendung der Theorie von Lewis und Ford für die Berücksichtigung von Coulombkorrekturen gerechtfertigt. Für diesen Fall ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den Meßwerten für Winkelkorrelationsspektren.

Diese Tatsache ist insofern merkwürdig, als dann auch, wie im folgenden dargelegt wird, die Meßergebnisse für das Gesamtspektrum mit der Theorie von Lewis und Ford übereinstimmen müßten, was aber nicht der Fall ist.

Bei einer Integration der experimentellen Ergebnisse für $S(k,\vartheta)$ über alle Raumwinkel $d\Omega = 2\pi \sin\vartheta \cdot d\vartheta$ müssen sich die Meßwerte für $S(k)$ ergeben. Experimentelle $S(k,\vartheta)$-Werte liegen im Bereich von $22{,}5^\circ$ bis 90° vor. Für größere Winkel werden (in Experiment und Theorie) die Intensitäten sehr klein, weshalb auch keine sinnvollen Meßergebnisse zu erhalten sind. Dieser Bereich liefert nur einen unerheblichen Beitrag zum Integral $\int S(k,\vartheta)\, d\Omega$.

Auf der anderen Seite stehen für $\vartheta = 22.5^\circ$ die experimentellen Ergebnisse der Winkelkorrelationsspektren noch in guter Übereinstimmung mit der Theorie. Eine eventuell für kleinere Winkel allmählich auftretende Abweichung würde aber für das Integral $\int S(k,\vartheta)\, d\Omega$ deshalb keine Bedeutung erlangen, weil der Winkelbereich um $\vartheta = 0^\circ$ wegen des Faktors $\sin\vartheta$ aus $d\Omega$ nur einen unerheblichen Beitrag liefert.

Dann müßte mit $S(k,\vartheta)$ aber auch $S(k)$ mit den theoretischen Ergebnissen übereinstimmen, was nicht der Fall ist. Hier liegen also 2 verschiedene Typen von Messungen vor, die Ergebnisse liefern, welche nicht zusammenstimmen.

In letzter Zeit wurden immer häufiger Messungen von differentiellen Winkelkorrelationsspektren durchgeführt, während die Messungen des Gesamtspektrums in den Hintergrund traten. Dies scheint einen Hinweis darauf zu geben, daß die Meßwerte des Gesamtspektrums doch nicht so zuverlässig sind. Persson [31] sieht eine Möglichkeit einer Verfälschung der Meßergebnisse des Gesamtspektrums in der Richtung einer Erhöhung z.B. in einer unzureichenden Korrektur auf Äußere Bremsstrahlung und in Streueffekten.

Als Zusammenfassung kann dann folgendes gesagt werden:

Die Messungen einerseits des Gesamtspektrums der IB und andererseits von differentiellen Winkelkorrelationsspektren liefern einander widersprechende Werte. Für P^{32} liegt dabei eine Reihe von Ergebnissen für die beiden Typen von Messungen vor, von denen die Winkelkorrelationsspektren im Einklang, die Meßwerte des Gesamtspektrums jedoch im Widerspruch zur Theorie von Lewis und Ford stehen. In dieser Theorie wird das Kerncoulombfeld in Bornscher Näherung berücksichtigt.

In der vorliegenden Arbeit wurde in Kapitel I eine Untersuchung der Coulombkorrekturen zur IB durchgeführt. Insbesondere wurde dabei gezeigt, daß für P^{32} die Verwendung der Bornschen Näherung für die Berücksichtigung des reinen Coulombfelds gerechtfertigt ist.

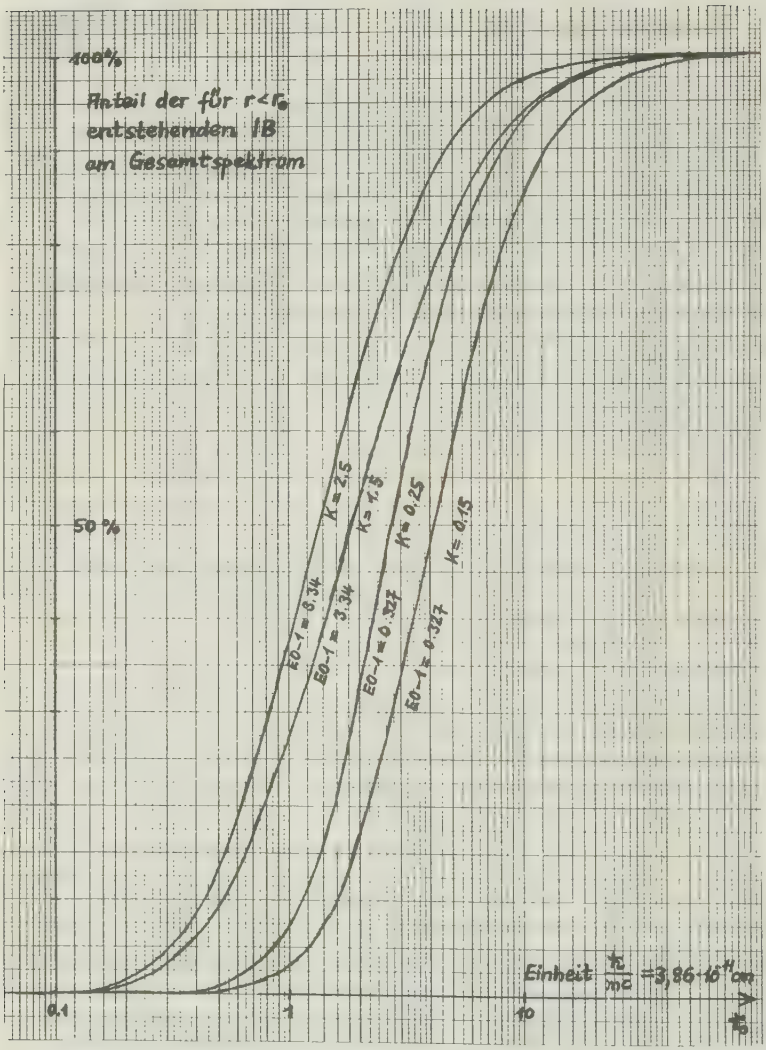
Die Abweichungen des Kernfeldes vom reinen Coulombfeld werden verursacht auf der einen Seite durch die endliche Kerngröße, andererseits durch Effekte der Elektronenhülle, wie z.B. Abschirmung des Coulombfeldes. In diesem Zusammenhang wurden in der vorliegenden Arbeit in Kapitel II mehrere Prozesse untersucht, ohne daß sich dabei Korrekturterme von höherer Ordnung als $\approx 10^{-3}$ ergaben. Weiter zeigte sich, daß eine Nichtlokalität der schwachen Wechselwirkung auf die IB praktisch ohne Einfluß ist.

Somit sprechen die in dieser Arbeit erhaltenen theoretischen Ergebnisse eindeutig zugunsten der Meßwerte von differentiellen Winkelkorrelationsspektren.

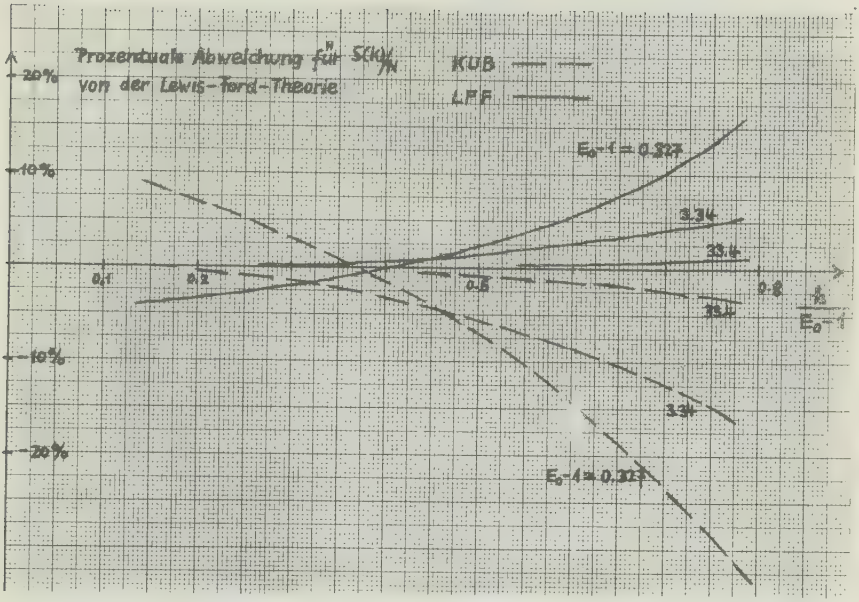
Herrn Prof. Dr. H. V o l z danke ich für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit und für viele nützliche Anregungen.

Herrn Dr. G. F e l s n e r bin ich für zahlreiche wertvolle Ratschläge zu Dank verpflichtet.

Der Firma Siemens möchte ich für die großzügig zur Verfügung gestellte Rechenzeit danken.

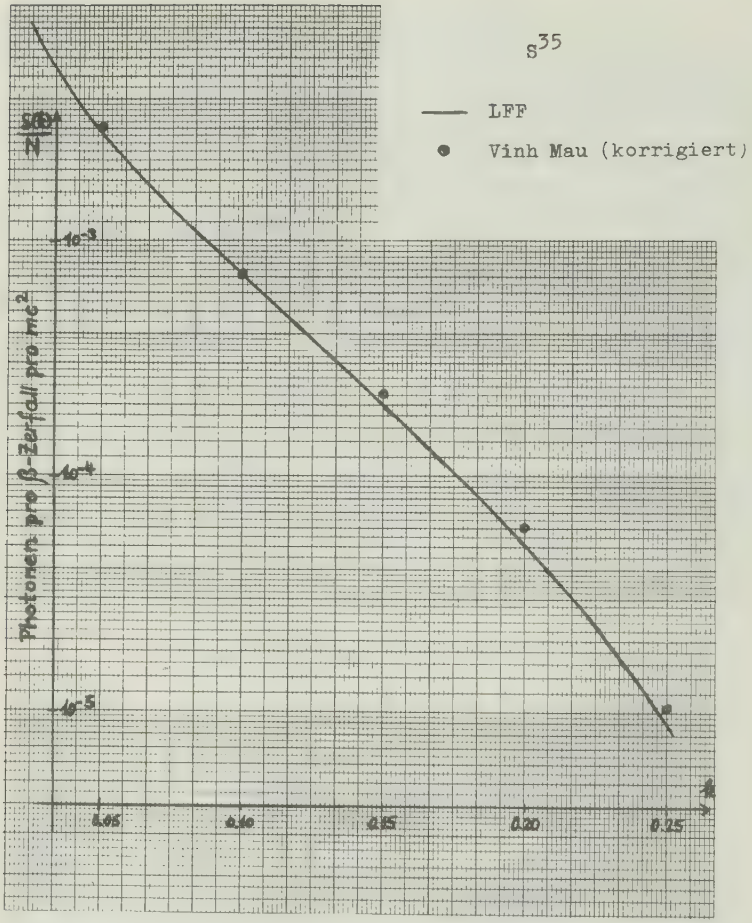

100%
Anteil der für r<r₀
entstehenden fB
am Gesamtspektrum
50 %
K = 2,5
K = 1,5
K = 0,25
K = 0,15
E0-1 = 6,34
E0-1 = 3,34
E0-1 = 0,327
E0-1 = 0,327
Einheit $\frac{\hbar}{mc} = 3{,}86 \cdot 10^{-11}$ cm
0,1
1
10
$\frac{\hbar\omega}{E_0}$

FIGUR 1



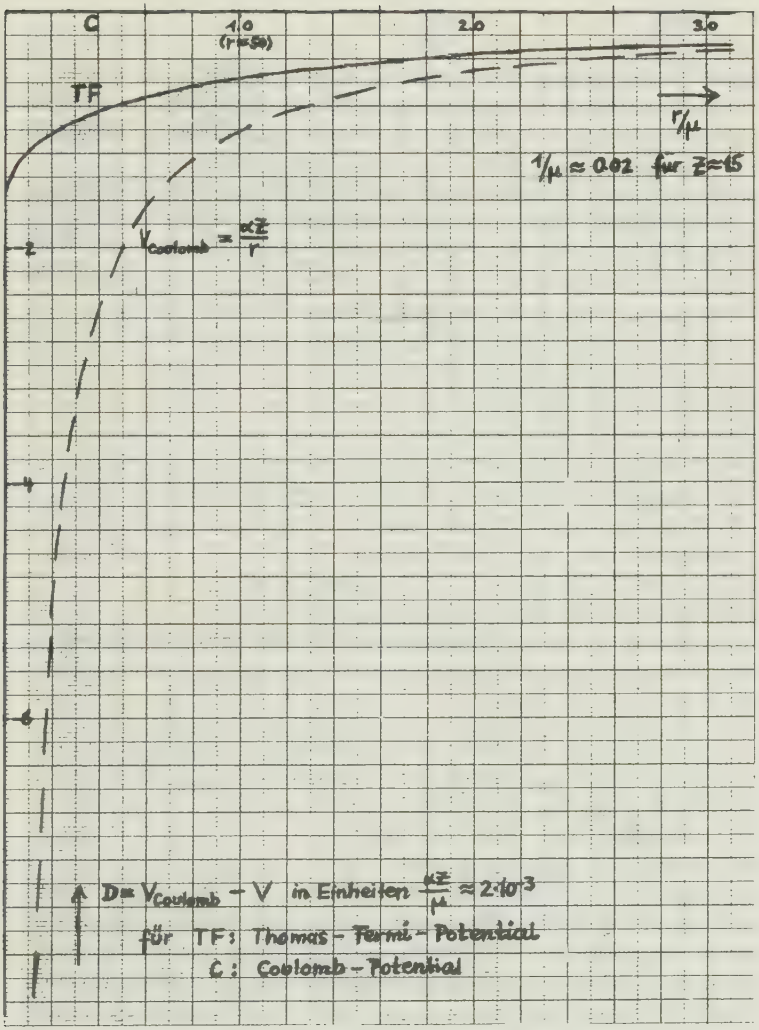
FIGUR 2

Vergleich numerischer Ergebnisse für verschiedene Grenzenergien



FIGUR 3

Vergleich numerischer Ergebnisse für S^{35}



FIGUR 4

Das Thomas-Fermi-Potential

LITERATURVERZEICHNIS

1) G.H. Aston, Proc.Cam.Phil.Soc. 23, 935 (1927).
2) J.K. Knipp and G.E. Uhlenbeck, Physica 3, 425 (1936)
3) F. Bloch, P.R. 50, 272 (1936)
4) K. Lidén and N. Starfeld, P.R. 97, 419 (1955)
5) N. Starfeld and N.L. Svantesson, P.R. 97, 708 (1955)
6) H.Langevin-Joliot, Dissertation, Paris 1956
7) R.R. Lewis and G.W. Ford, P.R. 107, 756 (1957)
8) vgl. z.B. Rose, Relativistic Electron Theory; Wiley, New York
9) R.J. Glauber and P.C. Martin, P.R. 109, 1307 (1958)
10) L. Spruch and W. Gold, P.R. 113, 1060 (1959)
11) A. Sommerfeld und A.W. Maue, Ann.d.Physik 22, 629 (1935)
12) R. Vinh Mau, Dissertation, Paris 1960
13) A. Deloff, Nucl. Phys. 13, 136 (1959)
14) G. Felsner, Z.Phys. 174, 43 (1963)
15) A. Pytte, P.R. 107, 1681 (1957)
16) G. Parzen, P.R. 80, 261 (1950)
17) H.A. Bethe and R.F. Bacher, Rev.Mod.Phys. 8, 194 (1936)
18) C.L. Longmire, P.R. 75, 15 (1949)
19) J.E. Thun et al, Ark.f.Fys. 22, 565 (1962)
20) J. Weneser, P.R. 91, 1025 (1953)
21) W. Gold and L. Spruch, P.R. 110, 290 (1958)
22) T.D. Lee and C.N. Yang, P.R. 128, 885 (1962)
23) H. Faissner, Neutrino Experimente, Vortrag auf dem "Kolloqium über ß-Zerfall und schwache Wechselwirkungen", Heidelberg 10. bis 13. März 1965
24) N. Byers and R.E. Peierls, Nuovo Cim. 10, 520 (1958)
25) Z. Matumoto and M. Yamada, Progr. Theor.Phys. 19, 285 (1958)
26) M.E. Rose, P.R. 82, 389 (1951)
27) J.S. Levinger, P.R. 90, 11 (1953)
28) M.E. Rose, P.R. 49, 727 (1936)
29) C. Longmire and H. Brown, P.R. 75, 264 und 1102 (1949)
30) E. Fermi, Z.Phys. 48, 73 (1928). Numerische Werte finden sich bei V. Bush and S.H. Caldwell, P.R. 38, 1898 (1931). Für das Verhalten für $r \to 0$ siehe: E.B.Baker, P.R. 36, 630 (1930)
31) B. Persson et al, Nucl. Phys. 12, 432 (1959); Nucl.Phys. 55, 49 (1964); Nucl. Phys. 67, 121 (1965)
32) J.E. Thun, B.G. Petterson and K. Siegbahn, Nucl.Phys.18,131 (1960)
33) H.J. Trebst, Dissertation, Erlangen 1966

L E B E N S L A U F

Am 17. Juli 1938 wurde ich in Nürnberg geboren als Sohn des städt. Verwaltungsoberamtmanns Hans Gebhardt und seiner Ehefrau Käte, geb. Koch.

Von 1944 bis 1948 besuchte ich die Volksschule an der Oedenberger Straße in Nürnberg und anschließend das Melanchthon-Gymnasium in Nürnberg, wo ich 1957 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1957/58 begann ich an der Universität Erlangen das Studium der Physik. Im Juli 1961 legte ich die Diplomvorprüfung und im November 1963 die Diplomhauptprüfung ab.

Am Institut für Theoretische Physik bin ich seit September 1963 als wissenschaftliche Hilfskraft bzw. als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten tätig.

Offsetdruck - Fotodruck
Josef Hogl
8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz,) Tel. 22990

Offsetdruck - Fotodruck
- J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Telefon 22990 -